

## 基于多轴应力疲劳的齿轮齿面断裂风险预估模型研究

王晓鹏<sup>1,2</sup> 于智龙<sup>1</sup> 余飞鹏<sup>2</sup> 杨帅<sup>1</sup> 曹志刚<sup>2</sup> 刘忠明<sup>2</sup> 万少雄<sup>1</sup>

(1. 郑州航空工业管理学院 机械工程学院, 郑州 450046)

(2. 中国机械总院集团郑州机械研究所有限公司, 郑州 450001)

**摘要:**【目的】齿面断裂是齿内深部位置处因材料损伤萌生裂纹的高周/超高周疲劳损伤的接触疲劳失效模式。拟根据多轴应力评定方法构建轮齿内场齿面断裂风险阈值的计算方法。【方法】基于接触理论、齿轮啮合几何理论及弹性力学基本理论, 建立齿轮副等效接触内场多轴应力解析计算模型, 形成齿轮梯度承载接触疲劳风险预测耦合数学模型; 利用微元离散数值计算方法进行基于弹性半平面接触应力分量奇异积分的接触问题的求解, 并开展基于多轴应力评定方法的轮齿内场齿面断裂风险阈值的研究。【结果】结果表明, 在多轴应力场下, 轮齿内部硬化层与芯部之间的风险阈值最高, 该处容易萌生裂纹并发生齿面断裂破坏。利用本文模型与利用 ISO 6336-4 技术规范得到的风险阈值较为接近, 且试验齿轮的断齿位置与利用提出的模型计算的风险区域基本一致, 表明提出的模型可以作为抗齿面断裂的齿轮的初期设计的参考, 可以作为除按照齿面断裂技术规范进行评估以外的齿面断裂风险评估的方法。提出的基于多轴应力疲劳的齿面断裂风险预估模型为齿轮传动工程装备的设计、制造提供了参考。

**关键词:** 圆柱齿轮; 齿面断裂; 多轴疲劳; 解析模型; 应力分布

**中图分类号:** TH132.41 **DOI:** 10.16578/j.issn.1004.2539.XXXX.XX.001

## 0 引言

齿面断裂(Tooth flank fracture, TFF)是齿内深部位置处因材料损伤萌生裂纹或基体材料夹杂缺陷的高周/超高周疲劳损伤的接触疲劳失效模式。在国际标准 ISO 10825—1:2022<sup>[1]</sup> 齿轮失效模式中首次确定性地收录了该失效模式。齿轮 TFF 损伤致裂物理特征失效示意图如图 1 所示。齿轮 TFF 与现有的点蚀、微点蚀和齿根断裂等常见疲劳失效模式的特征不同。点蚀和微点蚀由齿面或近齿面部位裂纹萌生并扩展导致; 齿根断裂的开裂部位在齿根附近, 具体为齿根处 30°切向面上, 致损因素为齿根处所受的循环弯曲应力。TFF 的主裂纹源在齿面硬化层下面首先萌生并扩展, 在初期几乎不能被直观观察发现, 从裂纹萌生到裂纹扩展至齿表面前, 裂纹对齿轮啮合接触行径的影响甚微, 导致齿面失效的发现具有迟滞性。

国外齿轮研究机构<sup>[2-4]</sup>开展了 TFF 相关测试和试验研究。研究成果均认为, TFF 初始裂纹源萌生于

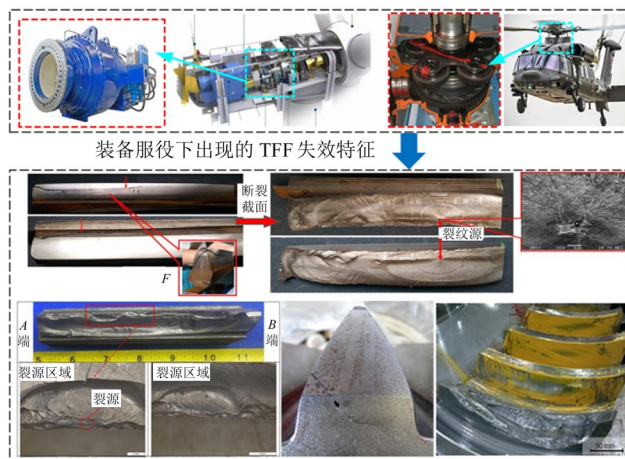


图1 齿轮 TFF 损伤致裂物理特征失效示意图

Fig. 1 Failure diagram of physical characteristics of TFF

齿内临近硬化层并向芯部过渡的区域, 在啮合界面循环交替载荷作用下, 裂纹分别向芯部和齿面扩展, 直至完全断裂, 表明 TFF 断裂的物理诱因与啮合界面的接触应力、硬化层的硬度梯度、残余应力梯度与松弛释放、材料微缺陷夹杂效应等因素相关。职

收稿日期: 2025-07-14 修回日期: 2025-09-21

基金项目: 河南省科技攻关项目(242102220068); 河南省高校重点项目(23A460004); 郑州航院研究生教育创新计划项目(2025CX112); 郑州航院实验室开放项目(ZHSC25-19)

作者简介: 王晓鹏,男,1990年生,河南新乡人,博士研究生,讲师; 主要研究方向为齿轮传动技术; xpwang4109@163.com。

曹志刚(通信作者),男,1983年生,山西太谷人,博士研究生,高级工程师; 主要研究方向为齿轮传动技术; 13803853002@163.com。

引用格式: 王晓鹏, 于智龙, 余飞鹏, 等. 基于多轴应力疲劳的齿轮齿面断裂风险预估模型研究 [J]. 机械传动, XXXX, XX (XX): 1-9.

WANG Xiaopeng, YU Zhilong, YU Feipeng, et al. Research on a risk prediction model of gear tooth flank fracture based on multiaxial stress fatigue criterion[J]. Journal of Mechanical Transmission, XXXX, XX (XX): 1-9.

彦锋等<sup>[5]743-749</sup>开展了界面摩擦效应下的齿面断裂风险预测研究,发现动摩擦因数的增大能微弱降低轮齿内部的安全系数,并提出界面润滑不良易引起轮齿内部裂纹的加速萌生,从而造成齿面疲劳断裂失效。曹志刚等<sup>[6]</sup>和刘怀举等<sup>[7]</sup>归纳了国内外学者对齿面断裂的研究成果,阐述了在啮合接触应力的存在和热处理工艺的使用下,轮齿内的场应力分布以及接触点的曲率半径、硬化层深度等因素对齿面断裂的影响。朱孝录<sup>[8]</sup>则从实际工程失效问题出发,综述了从早年的齿轮随机断裂至如今的齿面断裂的研究历程,较为深刻地分析了在热处理工艺的使用和材料增强机制下齿面断裂失效形式出现的频繁性和规律性,并简要归纳了其预防措施。

国际标准技术规范 ISO/TS 6336-4:2019<sup>[9]1-38</sup> 和国家标准 GB/Z 3480.4-2024<sup>[10]</sup> 基于材料-物理计算方法提出了圆柱齿轮剪切应力强度假说;考虑了工作表面应力、残余压应力和残余拉应力,将承受的动载荷和静载荷作为屈服和疲劳失效的诱因载荷。PEDRE-RO 等<sup>[11]</sup> 基于最小弹性势能原理<sup>[12]</sup> 与赫兹接触理论,建立了针对渐开线齿轮沿啮合线方向的非均匀载荷分布模型;通过运用多种载荷分布系数,提出了预估齿面抗点蚀能力的方法。朱有利等<sup>[13]</sup> 研究认为,从啮入点至单齿啮合最低点处的接触力和摩擦力引起的最大剪切应力的分布等造成了该处密集的点蚀破坏,靠近节线的齿根处近表面的剪切应力分布导致了该位置出现片状大块材料的剥落现象。袁洁等<sup>[14]</sup> 综述了齿轮疲劳裂纹萌生与扩展行为的研究现状,归纳了齿轮萌生的疲劳裂纹的3种类型、裂纹萌生与扩展的原因、对现有齿轮疲劳裂纹的模拟方法以及齿轮疲劳中的微结构力学行为,以提高读者对齿轮疲劳的特征和机制的理解;分析了齿轮疲劳试验中齿轮的剩余使用寿命,并对如何避免齿轮中裂纹的萌生提出了一些建议。ZHANG 等<sup>[15]</sup> 应用有限元数值模拟方法,研究了接触疲劳3种失效形式间的竞争关系;并考虑齿面微观几何的影响,认为齿面微观几何对齿面断裂的影响甚微,齿面断裂的主要影响因素为裂纹源萌生于硬化层中的深度,而受微观几何影响的应力则集中在近表面位置处。VUKELIC 等<sup>[16]</sup> 和 BÖHME 等<sup>[17]</sup> 利用材料理化分析(断口、金相等)手段研究了船用锥齿轮齿面断裂的原因,表明较大的硬度梯度容易引起内部承载能力的不足,从而引起裂纹的萌生。MANARIKKAL 等<sup>[18]</sup> 对高速重载行星齿轮箱中齿面断裂后的行星轮进行系统扭转模态分析,为行星齿轮箱的故障检测补充了新的特征信息。MACKALDENER 等<sup>[19]</sup> 使用 Findley 临界平面准则评估了 TFF 裂纹萌生的风险,将剪切应力的幅值和最大法向应力耦合,对裂纹萌生风险系数

的影响因素进行了研究。

上述研究结果表明,齿面断裂的承载特征为多轴应力。本文基于接触理论、齿轮啮合几何理论及弹性力学基本理论,建立齿轮副等效接触内场多轴应力解析计算模型;根据多轴应力评定方法进行轮齿内场齿面断裂风险阈值的计算,开展齿面断裂风险预测研究,为齿轮传动工程装备的设计、制造提供参考。

## 1 齿轮啮合等效接触模型

### 1.1 等效几何接触

要评估齿轮啮合传动接触下的应力和应变风险,首先需要对齿轮啮合轨迹上的几何参数和载荷参数进行关联表达。以渐开线直齿轮副啮合为例,图2为其单个轮齿自啮入至啮出的运动轨迹示意图。其中, $N_1N_2$ 为理论啮合长度; $B_1B_2$ 为实际啮合长度; $P$ 为节点; $C$ 和 $D$ 分别为单齿啮合区的高点和低点;下标 $p$ 表示主动轮, $q$ 表示从动轮; $O_p$ 、 $O_q$ 分别为主、从动轮的中心; $B_2O_p$ 为啮入点至主动轮中心的距离; $B_1O_p$ 为啮出点至主动轮中心的距离; $R_{bp}$ 和 $R_{bq}$ 分别为主、从动轮的基圆半径; $\omega_p$ 和 $\omega_q$ 分别为主、从动轮的角速度。沿着实际啮合线段 $B_1B_2$ 上任意动点的接触,可以等效为两圆柱接触。

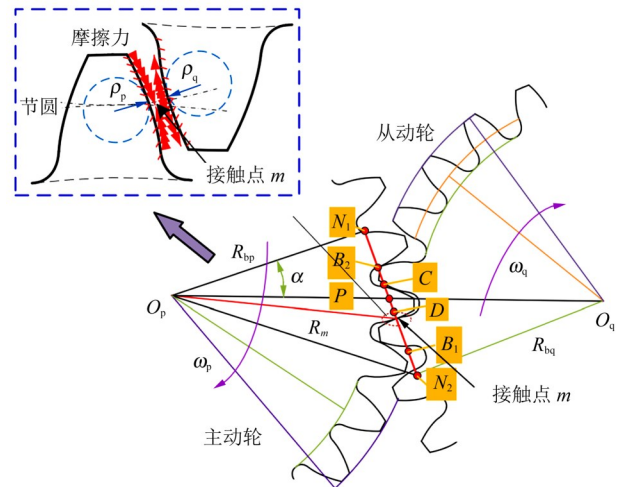


图2 齿轮啮合点等效接触几何图

Fig. 2 Equivalent contact geometry diagram at the gear meshing point

根据图2中直齿轮副啮合几何关系,在啮合线段 $B_1B_2$ 上任意接触点 $m$ 至节点 $P$ 的距离 $L$ 可以表示为

$$L = \mp R_p \sin \alpha \pm \sqrt{R_m^2 - R_p^2 + (R_p \sin \alpha)^2} \quad (1)$$

其中, $\alpha$ 为压力角; $R_m$ 为接触点(啮合动点) $m$ 至主动轮中心的距离; $R_p$ 为主动轮的分度圆半径;上层算术运算符适用于啮合动点位于 $B_1P$ 之间的情况;下层算术运算符适用于啮合动点位于 $B_2P$ 之间的情况。

根据 Bobillier 法则作图法<sup>[20]</sup>和渐开线齿轮齿廓基本参数,主、从动轮在啮合线上的啮合动点 $m$ 的曲

率半径  $R_{pm}$ 、 $R_{qm}$  可分别表示为

$$\begin{cases} R_{pm} = R_p \sin \alpha \pm L \\ R_{qm} = R_q \sin \alpha \mp L \end{cases} \quad (2)$$

式中,  $R_q$  为从动轮的分度圆半径。

主、从动轮在啮合线上的啮合动点  $m$  的瞬时运动切向速度  $v_{pm}$  和  $v_{qm}$  分别为

$$\begin{cases} v_{pm} = 2\pi n_p (R_p \sin \alpha \pm L) \\ v_{qm} = 2\pi n_q (R_q \sin \alpha \mp L) \end{cases} \quad (3)$$

式中,  $n_p$ 、 $n_q$  分别为主、从动轮的转速。

由式(1)~式(3)可得, 圆柱接触当量曲率半径  $R_{Em}$ 、滑滚比  $S$ 、卷吸速度  $U$  的表达式分别为

$$\begin{cases} R_{Em} = R_{pm} \times R_{qm} / (R_{pm} + R_{qm}) \\ S = 2(v_{pm} - v_{qm}) / (v_{pm} + v_{qm}) \\ U = (v_{pm} + v_{qm}) / 2 \end{cases} \quad (4)$$

## 1.2 接触载荷与接触应力

根据直齿轮副啮合特性(单-双轮齿啮合交替), 啮合线上的载荷非恒定不变, 引入单、双啮合过程中的载荷比, 对载荷的变化量进行描述。载荷比与齿轮参数(重合度、齿数等)和材料的刚度等参数相关, 基于文献[21]中对重合度为  $\varepsilon$  (定值,  $1 < \varepsilon < 2$ ) 的直齿轮副载荷比的研究, 可近似计算出载荷比系数  $R$ , 其计算式为

$$R(\xi) = \begin{cases} 0.36 + \frac{0.28}{\varepsilon - 1} (\xi - \xi_{inn}), & \xi_{inn} \leq \xi \leq \xi_{inn} + \varepsilon - 1 \\ 1, & \xi_{inn} + \varepsilon - 1 \leq \xi \leq \xi_{inn} + 1 \\ 0.36 - \frac{0.28}{\varepsilon - 1} (\xi - \xi_{inn} - \varepsilon), & \xi_{inn} + 1 \leq \xi \leq \xi_{inn} + \varepsilon \end{cases} \quad (5)$$

式中,  $\xi$  为完整啮合过程中重合度变量的值;  $\xi_{inn}$  为啮入时刻的重合度。

根据渐开线直齿轮传动作用力及载荷计算方式, 可求出主动轮沿作用线法向的分布载荷  $F$ , 其表达式为

$$F = 9549 \cdot \frac{P'R(\xi)}{n_p R_{bp} \cos \alpha_{pm}} \quad (6)$$

式中,  $P'$  为功率;  $\alpha_{pm}$  为接触点  $m$  的主动轮压力角。

根据赫兹接触理论, 啮合动点在接触界面间的最大接触应力  $\sigma'_{max}$  和接触半宽  $b$  的计算式分别为

$$\begin{cases} \sigma'_{max} = \sqrt{\frac{F}{\pi} \left( \frac{1}{R_{pm}} + \frac{1}{R_{qm}} \right) / \left( \frac{1 - \nu_p^2}{E_p} + \frac{1 - \nu_q^2}{E_q} \right)} \\ b = \sqrt{\frac{4F}{\pi} \left( \frac{1 - \nu_p^2}{E_p} + \frac{1 - \nu_q^2}{E_q} \right) / \left( \frac{1}{R_{pm}} + \frac{1}{R_{qm}} \right)} \end{cases} \quad (7)$$

式中,  $E_p$ 、 $E_q$  分别为主、从动轮材料的弹性模量;  $\nu_p$ 、 $\nu_q$  分别为主、从动轮材料的泊松比。

## 1.3 弹性半平面接触内场应力

在弹性半平面接触问题中, 接触界面受载后, 表面接触区域所受的任意载荷可分解为法向载荷和切向载荷。图3所示为接触界面的载荷分布。利用微元法, 在表面取微元宽度, 则任意点  $(x, z)$  处的应力分量  $\sigma_x$ 、 $\sigma_y$ 、 $\tau_{xz}$  可分别表示为

$$\begin{cases} \sigma_x = -\frac{2z}{\pi} \int_{x_1}^{x_2} \frac{p'(t)(x-t)^2}{[(x-t)^2 + z^2]^2} dt - \frac{2}{\pi} \int_{x_1}^{x_2} \frac{q'(t)(x-t)^3}{[(x-t)^2 + z^2]^2} dt \\ \sigma_y = -\frac{2z^3}{\pi} \int_{x_1}^{x_2} \frac{p'(t)}{[(x-t)^2 + z^2]^2} dt - \frac{2z^2}{\pi} \int_{x_1}^{x_2} \frac{q'(t)(x-t)}{[(x-t)^2 + z^2]^2} dt \\ \tau_{xz} = -\frac{2z^2}{\pi} \int_{x_1}^{x_2} \frac{p'(t)(x-t)}{[(x-t)^2 + z^2]^2} dt - \frac{2z}{\pi} \int_{x_1}^{x_2} \frac{q'(t)(x-t)^2}{[(x-t)^2 + z^2]^2} dt \end{cases} \quad (8)$$

式中,  $t$  为积分区间  $[x_1, x_2]$  上各积分点的坐标;  $p'(t)$  和  $q'(t)$  分别为法向载荷和切向载荷。

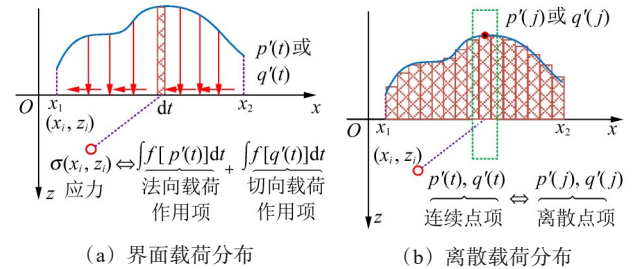


图3 接触界面的载荷分布

Fig. 3 Loads distribution at the contact interface

式(8)存在奇异积分项, 当法向和切向载荷组合复杂时, 其解析求解较为困难。因此, 通常采用数值方法进行离散求解。根据微元离散思维, 将载荷曲线利用等宽度微元进行离散, 如图3(b)所示, 其中,  $j$  为离散点的坐标。微元离散量应逼近载荷曲线, 从而使结果贴近真实解。

## 2 多轴应力疲劳模型

在多轴应力条件下, 根据特征点的疲劳极限可将整个应力空间分为安全和不安全两部分, 可利用不等式描述疲劳准则评定方法。由外部循环载荷引起的应力应保持在应力不等式空间的范围内, 表明特征点的疲劳风险被控制在安全范围之内。基于不等式评判方法, PAPAPOULOS<sup>[22]</sup>提出了特征点应力疲劳临界面准则。本文研究的齿轮内场应力特征点在齿面接触载荷和制造工艺的双重影响下, 表现为显著的多轴非比例应力状态, 下文将采用应力疲劳极限准则进行齿面断裂风险评定。

### 2.1 疲劳极限准则方法

如图4所示, 在固体内部的任意点位置处定义其中心位置点  $O$ , 任意面  $V$  可由其单位法向量  $\mathbf{n}$  定义, 该法向量与坐标系  $Oxyz$  的  $z$  轴的夹角为  $\theta$ , 在  $xoy$  平面上

的投影与  $x$  轴的夹角为  $\varphi$ 。对于平面  $V$ ，引入表示该平面上剪切应力的分量  $\tau_V$ 、剪切应力幅值  $\tau_a$  和广义剪切应力幅值  $T_a$ ，三者的详细的关系将在下节中描述。当  $T_a$  为最大值时，该平面为应力状态的最大临界面状态。

疲劳极限准则中临界面法的数学模型为

$$\max T_a(\theta, \varphi) + c\sigma_{H, \max} \leq \gamma \quad (9)$$

式中， $c$  和  $\gamma$  均为材料性能参数，由单轴疲劳下的拉伸、压缩、扭转性能等因素确定； $\sigma_{H, \max}$  为加载循环期内的最大静水应力。

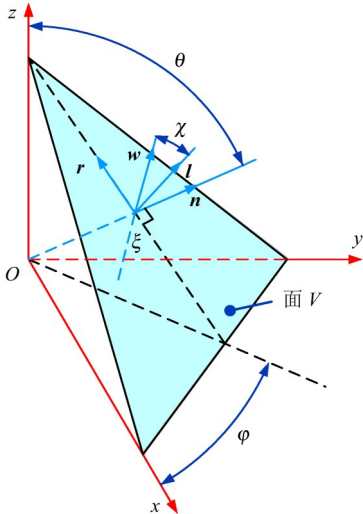


图4 疲劳临界面  $V$  和向量  $m, n, r, l$

Fig. 4 Fatigue critical plane  $V$  and vectors  $m, n, r, l$

## 2.2 临界面应力

为了表达疲劳极限准则中任意面  $V$  的剪切应力幅值，需要根据面  $V$  与坐标系的向量换算获得，面  $V$  的单位法向量为

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{bmatrix} \quad (10)$$

同时，在面  $V$  上构建向量  $\mathbf{r}$  和  $\mathbf{l}$ ，其中， $\mathbf{r}$  为在  $xOy$  平面上的边的中线上指向顶点方向的单位向量， $\mathbf{l}$  为面  $V$  上与  $\mathbf{r}$  垂直的单位向量， $\mathbf{r}$ 、 $\mathbf{l}$  和  $\mathbf{n}$  两两正交，如图4所示。 $\mathbf{l}$  向量和  $\mathbf{r}$  向量可分别表示为

$$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} l_x \\ l_y \\ l_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{r} = \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos \theta \cos \varphi \\ -\cos \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \end{bmatrix} \quad (11)$$

定义在面  $V$  上的任意一条线  $\xi$  与  $\mathbf{l}$  向量的夹角设为  $\chi$ ；设沿着  $\xi$  的单位向量为  $\mathbf{w}$ ，根据坐标转换关系，向量  $\mathbf{w}$  可表示为

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \varphi \cos \chi - \cos \theta \cos \varphi \sin \chi \\ \cos \varphi \cos \chi - \cos \theta \sin \varphi \sin \chi \\ \sin \theta \sin \chi \end{bmatrix} \quad (12)$$

沿  $\xi$  的剪切应力的大小  $\tau_V(\varphi, \theta, \chi)$  与坐标系

$Oxyz$  下的应力张量  $\boldsymbol{\sigma}$  满足的关系式为

$$\begin{aligned} \tau_V(\varphi, \theta, \chi) = |\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{w}| = & (\sin \theta \cos \varphi \sigma_{xx} + \sin \theta \sin \varphi \sigma_{xy} + \\ & \cos \theta \sigma_{xz}) \cdot (-\sin \varphi \cos \chi - \cos \theta \cos \varphi \sin \chi) + \\ & (\sin \theta \cos \varphi \sigma_{xy} + \sin \theta \sin \varphi \sigma_{yy} + \cos \theta \sigma_{yz}) \cdot \\ & (\cos \varphi \cos \chi - \cos \theta \sin \varphi \sin \chi) + \\ & (\sin \theta \cos \varphi \sigma_{xz} + \sin \theta \sin \varphi \sigma_{yz} + \\ & \cos \theta \sigma_{zz}) \sin \theta \sin \chi \end{aligned} \quad (13)$$

式中， $\sigma_{xx}$ 、 $\sigma_{xy}$ 、 $\sigma_{xz}$ 、 $\sigma_{yy}$ 、 $\sigma_{yz}$ 、 $\sigma_{zz}$  为应力张量  $\boldsymbol{\sigma}$  的6个分量。对于给定角度  $\theta$ 、 $\varphi$  确定的面  $V$  上的剪切应力的幅值  $\tau_a(\varphi, \theta, \chi)$  可表示为

$$\tau_a(\varphi, \theta, \chi) = \frac{1}{2} [\max \tau_V(\varphi, \theta, \chi) - \min \tau_V(\varphi, \theta, \chi)] \quad (14)$$

将式(14)转换为广义剪切应力的幅值  $T_a(\varphi, \theta)$ ，其表达式为

$$T_a(\varphi, \theta) = \sqrt{\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \tau_a^2(\theta, \varphi, \chi) d\chi} \quad (15)$$

## 3 齿面断裂风险模型

### 3.1 标准技术规范法

齿轮抗齿面断裂技术规范中给出了利用局部位置的等效剪切应力与该位置的材料剪切强度极限的比值来进行齿面断裂风险的评判，当该比值大于0.8时，判定该位置容萌生裂纹，从而具有齿面断裂的风险，因此将0.8这一比值作为认定存在齿面断裂风险的阈值。风险评估数学模型为

$$A_{FF, \max} = \max \left[ \frac{\tau(z)}{\tau_{\text{per}}(z)} + c_1 \right] \quad (16)$$

式中， $A_{FF, \max}$  为最大齿面断裂风险阈值； $\tau(z)$  为啮合点沿深度  $z$  的等效剪切应力； $\tau_{\text{per}}(z)$  为啮合点沿深度  $z$  的材料剪切应力； $c_1$  为齿面断裂材料修正系数，对于渗碳钢，其值可取0.04。

### 3.2 多轴应力法

第3.1节介绍的标准技术规范法以剪切应力为评判项，而轮齿内部的应力状态为多轴应力<sup>[23]</sup>。因此，本文以上文阐述的多轴应力疲劳模型为切入点，同样利用局部点材料的风险阈值进行齿面断裂风险评估，即将式(9)进一步改进。定义风险阈值为  $B_{FF}$ ，其表达式为

$$B_{FF} = [\max T_a(\theta, \varphi) + c\sigma_{H, \max}] / \gamma \quad (17)$$

## 4 仿真分析与讨论

### 4.1 齿轮副参数

表1所示为选取的齿轮副的计算参数。图5所示为啮合点沿啮合线的曲率半径、速度和滚滑比的变化趋势。其中，等效曲率半径和卷吸速度沿啮合线

微弱增大; 滚滑比则先减小后增大, 在节圆位置处的数值为0, 这与齿轮在理想啮合下节圆位置为纯滚动状态有关。除此之外, 主动齿轮和从动齿轮啮合点本体的曲率半径和速度均同时增大或减小, 表明主、从动轮在除节圆以外的其他位置存在相对滑动。

表1 齿轮副参数

Tab. 1 Parameters of gear pair

参数	数值	参数	数值
模数/mm	4	抗拉强度/MPa	1229
齿数	32、48	屈服强度/MPa	1014
压力角/(°)	20	表面硬度/HRC	58~62
齿宽/mm	30	芯部硬度/HV	400
弹性模量/GPa	206	有效硬化层深/mm	模数×(0.2~0.3)
泊松比	0.3	功率/kW	141
密度/(kg/m <sup>3</sup> )	7 850	转速/(r/min)	1 000

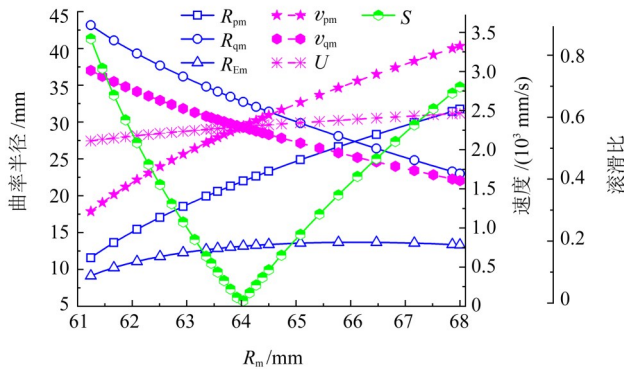


图5 曲率半径、速度和滚滑比沿啮合线的变化

Fig. 5 Radius of curvature, velocities and rolling-sliding ratio vary along the line of action

图6所示为在表1中的功率和转速下沿啮合线轮齿啮合交替的载荷、应力和接触半宽的变化趋势。由于直齿轮的重合度 $\varepsilon$ 小于2, 啮合的轮齿出现单-双齿啮合承载交替现象, 因此, 图6中的参数先增大后减小。由图6可知, 单齿啮合区起始点和终止点之间的啮合点承载最大, 接触应力也最大。在计算工况下, 最大接触应力位于主动齿轮的单齿啮合区起始点位置处, 其数值约为1 450 MPa, 接触半宽约为0.326 mm。

#### 4.2 主应力和应力分量

基于赫兹线接触理论, 将单齿啮合区起始点( $R_m$ 约为63.4 mm)位置处的载荷和接触应力代入式(8)中, 并利用微元数值方法计算啮合点接触面及以下各处的应力状态。图7为笛卡儿坐标系下的应力张量的分量和3个主应力的分布云图。由图7可知, 应力张量的分量的云图和主应力云图均具有显著的2倍接触半宽内的压应力效应, 并以接触宽度为中心沿深度和宽度方向散射。其中, 当深度与接触半宽的比 $z/l$

$b$ 大于0.5时,  $\sigma_x$ 的云图的形状与“蝴蝶展翅”形状相似。沿直线 $x = 0$ (中线位置), 随着深度的增加,  $\sigma_x$ 、 $\sigma_y$ 、 $\sigma_z$ 均逐渐减小; 而同一深度下, 沿宽度方向,  $\sigma_x$ 、 $\sigma_y$ 、 $\sigma_z$ 均先增大后减小。图7(d)为 $xz$ 平面的剪切应力云图,  $\tau_{xz}$ 关于直线 $x = 0$ 对称分布, 沿深度方向逐渐降低。应力张量的分量和3个主应力的分布云图与文献[5]<sup>[747-748]</sup>利用典型公式的运算结果基本一致, 进一步验证了利用微元数值方法求解的基于赫兹线接触理论的内场应力结果的正确性。

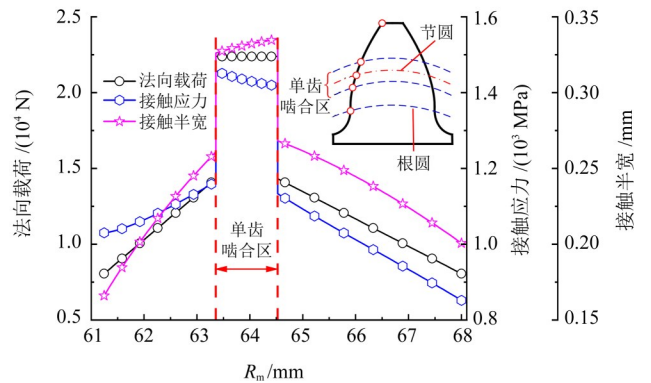


图6 法向载荷、接触应力和接触半宽沿啮合线的变化

Fig. 6 Normal load, contact stress and contact half-width vary along the line of action

#### 4.3 多轴应力分量

图8为多轴应力模型[式(17)]中的各参数的分布云图。其中, 图8(a)所示的静水压应力 $\sigma_H$ 表现为典型的接触宽度内的正压效应, 随着深度和宽度的增加, 其值逐渐减小。图8(b)所示的广义剪切应力的幅值 $\max T_a$ 的分布云图表明, 广义剪切应力的幅值并未出现在压应力较大的位置, 而是在各方向应力(含剪切应力)的共同作用下出现在次表层位置。对于线弹性断裂力学中经典的I型(张开型)、II型(滑移型)和III型(撕裂型)裂纹, II型和III型裂纹的主导应力均为沿裂纹面的剪切应力, 促使该位置点发生位错、滑移等, 从而导致裂纹的萌生; 而齿轮典型的剥落和齿面断裂的起始裂纹均位于次表层位置。由此可见, 剪切应力幅值是影响深层裂纹萌生的关键因素。

图8(c)所示的多轴应力项 $\max T_a + c\sigma_{H, \max}$ 的分布与广义剪切应力幅值的分布较为一致, 较大应力响应区位于次表面以下。图8(d)所描述的参数 $\gamma$ 是一个经渗碳淬火工艺后的、经强度参数换算<sup>[24]</sup>的材料承载性能参数, 其与硬度梯度和抗拉强度等材料性能相关。基于热处理和加工工艺沿接触宽度方向的匀质性,  $\gamma$ 的值沿宽度方向基本一致, 而沿深度方向逐渐降低, 与齿轮经渗碳淬火后其硬度的降低趋势基本一致。

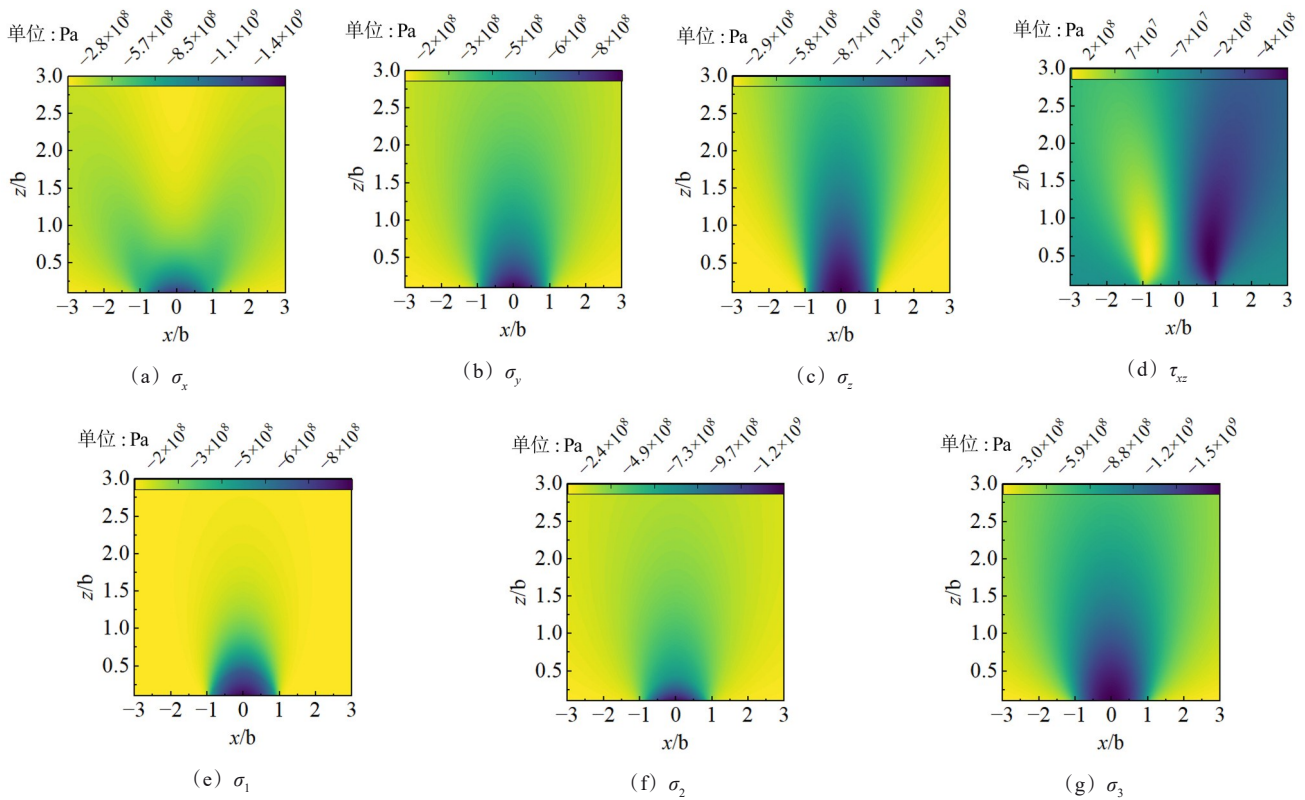


图7 应力张量的4个分量与3个主应力的分布云图

Fig. 7 Distribution nephogram of four components of stress tensor and three principal stresses

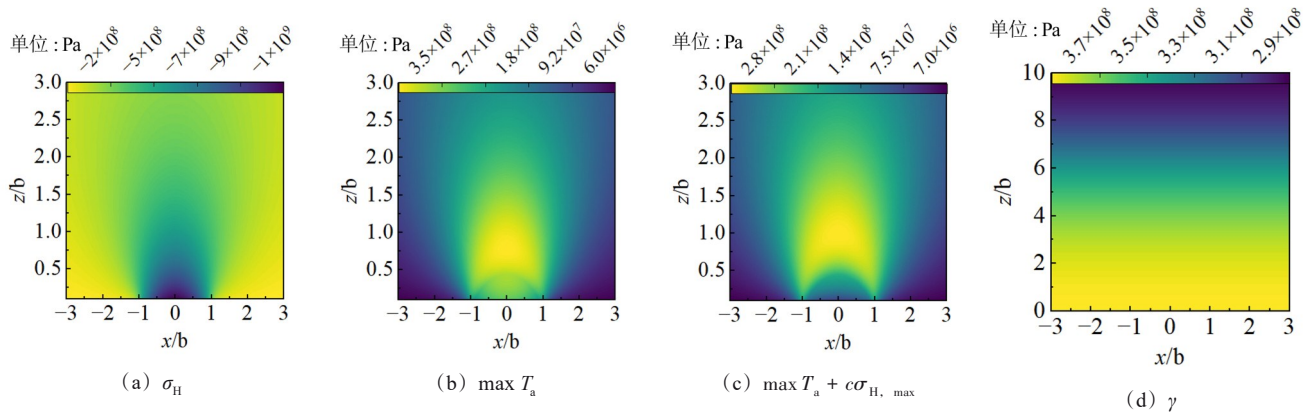


图8 多轴应力疲劳相关参数的分布云图

Fig. 8 Distribution nephogram of the relevant parameters of multiaxial stress fatigue

#### 4.4 应力风险预测

利用多轴应力法[式(17)]计算轮齿内部材料承载利用率风险,多轴应力疲劳的风险阈值 $B_{FF}$ 的云图如图9所示。由图9(a)可知,未考虑残余应力分布的情况下,沿深度方向 $B_{FF}$ 先增大后减小,沿宽度方向 $B_{FF}$ 的图线为凸曲线,且成对称分布,最大值约为0.8。图9(b)为考虑残余压应力分布的情况,残余压应力被作为平均应力引入静水应力中<sup>[25-26]</sup>, $B_{FF}$ 的云图与图9(a)较为一致。然而, $B_{FF}$ 的最大值降低至约0.6,表明残余压应力有利于抑制风险域中裂纹的萌生。同时,在现代齿轮设计中,齿轮产品均通过渗碳淬火、强化工艺(喷丸、滚压等)等加工方式引入从表面至芯部梯度

分布的残余压力层,以提升齿轮的接触承载能力。

图10为基于齿面断裂技术规范ISO 6336-4和本文模型计算的沿深度变化的材料风险阈值曲线图,其中有效硬化层厚度为0.8 mm,表面维氏硬度为690 HV。由图10可知,在未考虑残余压应力的情况下,根据技术规范和本文模型计算的材料风险阈值沿深度均先增大后减小,且技术规范的计算值明显高于本文模型的计算值;同时,技术规范在1倍接触半宽附近的风险阈值约为1.2,已超出风险评判极限值1,表明根据技术规范计算得到的风险阈值偏于保守。在考虑残余压应力的情况下,当深度小于约1倍接触半宽时,两者的风险计算值基本一致,而当深

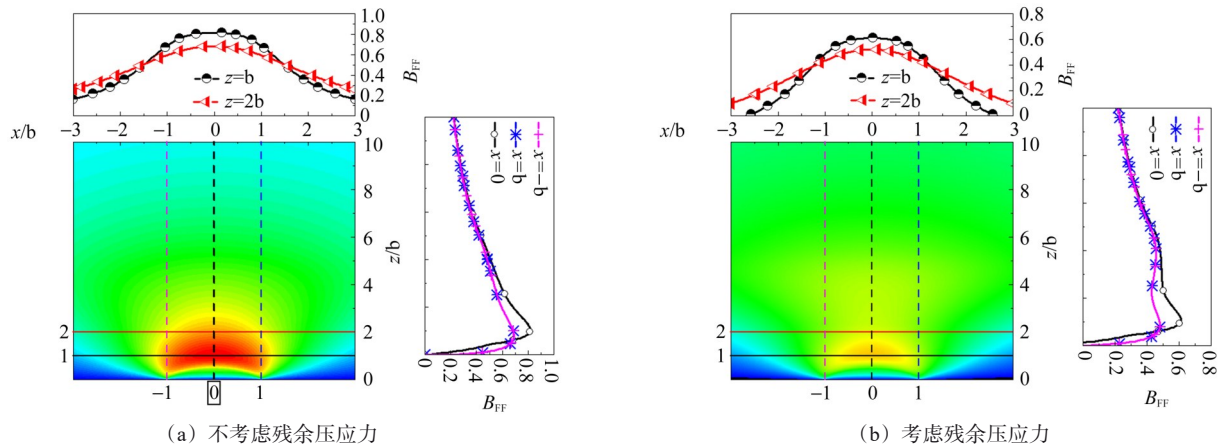


图9 多轴应力疲劳的风险阈值云图

Fig. 9 Risk threshold nephogram of the multiaxial stress fatigue

度在1倍接触半宽与4倍接触半宽之间时, 技术规范的计算值均低于本文模型的计算值, 表明根据本文模型计算得到的风险阈值偏于保守; 当深度超过4倍接触半宽时, 两者的计算值又趋于一致。综合对比可知, 在近表面(1倍接触半宽以内)和较深层位置处, 根据齿面断裂技术规范与本文模型计算的风险阈值具有一致性, 在中间过渡区则表现出一定的差异性。

换为剪切应力分量后两者耦合机制下的应力评定方式, 仅仅考虑了裂纹扩展所需的驱动力。因此, 在1倍接触半宽位置与芯部之间的过渡区, 利用齿面断裂技术规范和本模型计算的风险阈值不同。

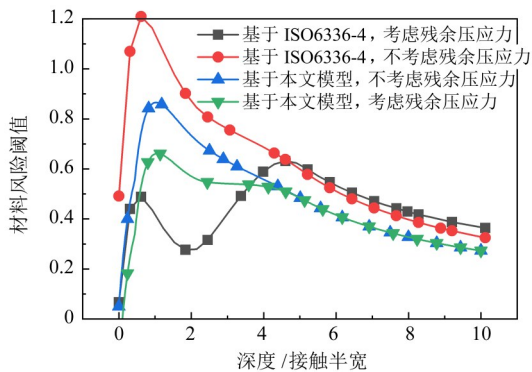


图10 沿深度变化的材料风险阈值曲线图

Fig. 10 Curve graph of the material risk threshold varying with depth

齿面断裂技术规范提出的齿面断裂评定方法的评定范围为1倍接触半宽以内及有效硬化层与芯部的过渡区。进一步比较分别根据技术规范和本模型计算得到的1倍接触半宽以内、有效硬化层深度附近和芯部区域的风险阈值的计算结果可知, 在1倍接触半宽和有效硬化层之间, 根据本文模型计算的风险阈值约为0.57, 而根据技术规范计算的风险阈值的最小值低至0.3; 在有效硬化层与芯部的过渡区, 本文模型的计算值基本与0.57持平, 而技术规范的计算值从0.3增长至0.5, 其主要原因为本文模型采用了剪切应力、静水应力和残余应力等多轴应力耦合机制下的应力评定方式, 而静水应力和残余应力对裂纹的萌生和扩展有一定抑制作用; 而齿面断裂技术规范中主要采用了剪切应力效应和残余应力转

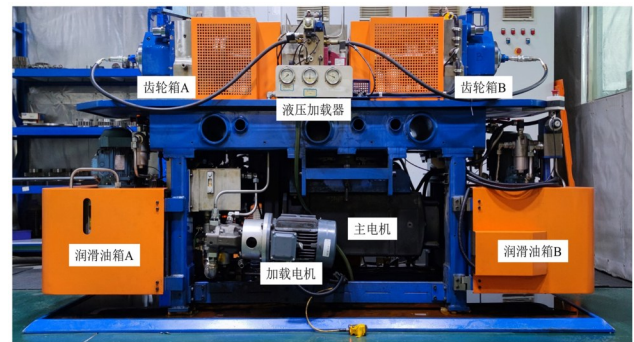


图11 中心距为160 mm的圆柱齿轮接触疲劳试验机

Fig. 11 Contact fatigue testing machine for cylindrical gear with center distance of 160 mm

## 5 试验表征

选取表1中的齿轮参数, 在中心距为160 mm的圆柱齿轮接触疲劳试验机上进行试验, 采用阶梯加载法进行齿轮接触疲劳加载试验研究。

图12所示为试验齿轮齿面断裂的宏观特征。由图12可知, 裂纹萌生后同时向与齿面平行的指向齿顶的方向和非工作齿面的齿根处扩展, 在裂纹源所在深度的位置处形成典型的凸脊形貌, 而沿指向齿顶的与齿面平行的方向扩展并转向齿面时则留下明显的凹谷形貌, 其断裂特征与ISO/TS 6336-4:2019<sup>[9]11-38</sup>技术规范所述基本一致。图12中试验齿轮裂纹源在深度为1 mm处, 此处有效硬化层以下。由图10的风险阈值曲线可知, 有效硬化层与芯部的过渡区的风险阈值相对较高, 是容易引起裂纹萌生的高风险位置。试验齿轮的断齿位置与利用文中模型计算的风险区域基本一致, 表明本文模型可以作为抗齿面断裂的齿轮的初期设计的参考, 可以作为

除按照齿面断裂技术规范进行评估以外的齿面断裂风险评估的方法。同时,文中模型是基于全解析模型对齿面断裂进行计算与评估的,为齿面的承载能力计算提供了便利。

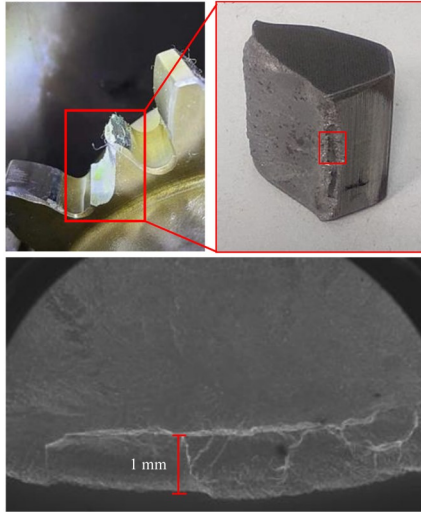


图12 试验齿轮的断裂特征

Fig. 12 Fracture characteristics of the test gear

## 6 结论

基于接触理论、齿轮啮合理论和弹性力学基本理论建立了渗碳淬火(硬齿面)齿轮断裂的多轴应力疲劳风险预测评估模型,开展了正向设计评定的齿面断裂失效裂风险研究。本文主要工作和结论如下:

1) 建立了基于齿轮啮合几何与多轴应力准则的直齿齿轮齿面接触断裂失效风险预测模型,利用材料承载利用率评定方法,预测了齿轮齿面断裂失效风险阈值,得到了有关直齿轮接触疲劳失效快速正向设计计算评定方法。

2) 预测模型的风险预测评定结果与齿面断裂技术规范的风险预测评定结果较为接近,且试验齿轮的断齿位置与利用文中模型计算的风险区域基本一致,表明本文模型可以作为抗齿面断裂的齿轮的初期设计的参考,可以作为除按照齿面断裂技术规范进行评估以外的齿面断裂风险评估的方法。文中模型是基于全解析模型对齿面断裂进行计算与评估的,为齿面的承载能力计算提供了便利。

文中模型是对直齿轮在其几何和材料属性耦合影响下的基于快速解析方法的接触疲劳风险评定模型,若应用于其他类型的齿轮,可采取当量齿参数等效转化方法,并进行接触风险预测计算。

### 参 考 文 献

[1] International Organization for Standardization. Gears—wear and damage to gear teeth—part 1: nomenclature and characteristics: ISO 10825-1: 2022 [S]. Geneva: International Organization for

Standardization, 2022:1-73.

- [2] BOIADJIEV I, WITZIG J, TOBIE T, et al. Tooth flank fracture—basic principles and calculation model for a sub surface initiated fatigue failure mode of case hardened gears [M]//International Gear Conference 2014: 26th-28th August 2014, Lyon. Amsterdam: Elsevier, 2014: 670-680.
- [3] AL B, LANGLOIS P. Analysis of tooth interior fatigue fracture using boundary conditions form an efficient and accurate LTCA [J]. Gear Solutions. 2016(2):33-39.
- [4] BEERMANN D S, KISSLING D U. Tooth flank fracture: a critical failure mode influence of macro and micro geometry [R]. Pune: KISSsoft User Conference, 2015: 1-14.
- [5] 职彦锋, 王晓鹏, 曹志刚, 等. 考虑界面摩擦效应的齿轮齿面断裂风险预测研究[J]. 机械强度, 2024, 46(3): 743-749. ZHI Yanfeng, WANG Xiaopeng, CAO Zhigang, et al. Prediction model of gear tooth flank fracture considering interfacial friction [J]. Journal of Mechanical Strength, 2024, 46(3): 743-749.
- [6] 曹志刚, 王敬元, 杨永飞, 等. 硬齿面齿轮齿面断裂研究概况[J]. 机械传动, 2022, 46(6): 170-176. CAO Zhigang, WANG Jingyuan, YANG Yongfei, et al. Review on tooth flank fracture failure of hardened gears [J]. Journal of Mechanical Transmission, 2022, 46(6): 170-176.
- [7] 刘怀举, 刘鹤立, 朱才朝, 等. 轮齿齿面断裂失效研究综述[J]. 北京工业大学学报, 2018, 44(7): 961-968. LIU Huaiju, LIU Heli, ZHU Caichao, et al. Review on gear tooth flank fracture [J]. Journal of Beijing University of Technology, 2018, 44(7): 961-968.
- [8] 朱孝录. 硬齿面齿轮随机断裂的多种失效模式、原因和预防[J]. 机械传动, 2022, 46(6): 84-94. ZHU Xiaolu. Multiple failure modes, causes and prevention of random fracture for hard tooth flank gears [J]. Journal of Mechanical Transmission, 2022, 46(6): 84-94.
- [9] International Organization for Standardization. Calculation of load capacity of spur and helical gears—part 4: calculation of tooth flank fracture load capacity: ISO/TS 6336-4: 2019 [S]. Geneva: International Organization for Standardization, 2022: 1-38.
- [10] 全国齿轮标准化技术委员会. 直齿轮和斜齿轮承载能力计算 第4部分: 齿面断裂承载能力计算: GB/Z 3480. 4—2024 [S]. 北京: 中国标准出版社: 1-36. National Technical Committee for Gear Standardization. Calculation of load capacity of spur and helical gears—part 4: calculation of tooth flank fracture load capacity: GB/Z 3480. 4—2024 [S]. Beijing: Standards Press of China: 1-36.
- [11] PEDRERO J I, PLEGUEZUELOS M, MUÑOZ M. Critical stress and load conditions for pitting calculations of involute spur and helical gear teeth [J]. Mechanism and Machine Theory, 2011, 46(4): 425-437.
- [12] 胡纪滨, 李岩, 李雪原. 弹流润滑状态下渐开线斜齿轮啮合损失解析模型研究[J]. 北京理工大学学报, 2015, 35(7): 682-686. HU Jibin, LI Yan, LI Xueyuan. Prediction of meshing losses of involute helical gear in EHL state [J]. Transactions of Beijing Institute of Technology, 2015, 35(7): 682-686.
- [13] 朱有利, 王燕礼, 边飞龙, 等. 渐开线直齿圆柱齿轮接触疲劳失效成因再分析[J]. 摩擦学学报, 2014, 34(6): 722-728.

- ZHU Youli, WANG Yanli, BIAN Feilong, et al. Re-examining the origins of contact fatigue failure of involute cylindrical spur gears [J]. *Tribology*, 2014, 34(6): 722-728.
- [14] 袁洁, 纪宏超, 宋昌哲, 等. 齿轮疲劳裂纹萌生与扩展行为研究现状[J]. *机械传动*, 2023, 47(5): 167-176.
- YUAN Jie, JI Hongchao, SONG Changzhe, et al. Research status of initiation and expansion behavior of gear fatigue cracks [J]. *Journal of Mechanical Transmission*, 2023, 47(5): 167-176.
- [15] ZHANG B Y, LIU H J, ZHU C C, et al. Numerical simulation of competing mechanism between pitting and micro-pitting of a wind turbine gear considering surface roughness [J]. *Engineering Failure Analysis*, 2019, 104: 1-12.
- [16] VUKELIC G, PASTORCIC D, VIZENTIN G, et al. Failure investigation of a crane gear damage [J]. *Engineering Failure Analysis*, 2020, 115: 104613.
- [17] BÖHME S A, MERSON D, VINOGRADOV A. On subsurface initiated failures in marine bevel gears [J]. *Engineering Failure Analysis*, 2020, 110: 104415.
- [18] MANARIKKAL I, ELASHA F, NOWAK B, et al. Acoustic radiation modes and modal criterion dependency of a planetary gearbox for fault detection under the presence of tooth flank fracture [J]. *Structural Health Monitoring*, 2021: 1-10.
- [19] MACKALDENER M, OLSSON M. Design against tooth interior fatigue fracture [J]. *Gear Technology*, 2000, 17(6): 18-24.
- [20] 厉海祥. 点线啮合齿轮传动 [M]. 北京: 机械工业出版社, 2011: 100-140.
- LI Haixiang. Point-line meshing gear transmission [M]. Beijing: China Machine Press, 2011: 100-140.
- [21] SÁNCHEZ M B, PLEGUEZUELOS M, PEDRERO J I. Approximate equations for the meshing stiffness and the load sharing ratio of spur gears including hertzian effects [J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2017, 109: 231-249.
- [22] PAPAPOPOULOS I V. Long life fatigue under multiaxial loading [J]. *International Journal of Fatigue*, 2001, 23(10): 839-849.
- [23] WITZIG J. Flankenbruch-eine grenze der zahnradtragfähigkeit in der werkstofftiefe [D]. München: Technische Universität München, 2012: 1-10.
- [24] 刘鹤立. 齿轮接触疲劳—磨损失效竞争机制研究 [D]. 重庆: 重庆大学, 2019: 1-73.
- LIU Heli. Study on gear contact fatigue-wear failure competition mechanism [D]. Chongqing: Chongqing University, 2019: 1-73.
- [25] BERNASCONI A, DAVOLI P, FILIPPINI M, et al. An integrated approach to rolling contact sub-surface fatigue assessment of railway wheels [J]. *Wear*, 2005, 258(7/8): 973-980.
- [26] DESIMONE H, BERNASCONI A, BERETTA S. On the application of Dang Van criterion to rolling contact fatigue [J]. *Wear*, 2006, 260(4/5): 567-572.

## Research on a risk prediction model of gear tooth flank fracture based on multiaxial stress fatigue criterion

WANG Xiaopeng<sup>1,2</sup> YU Zhilong<sup>1</sup> YU Feipeng<sup>2</sup> YANG Shuai<sup>1</sup> CAO Zhigang<sup>2</sup>  
LIU Zhongming<sup>2</sup> WAN Shaoxiong<sup>1</sup>

(1. School of Mechanical Engineering, Zhengzhou University of Aeronautics, Zhengzhou 450046, China)

(2. China Academy of Machinery Zhengzhou Research Institute of Mechanical Engineering Co., Ltd., Zhengzhou 450001, China)

**Abstract:** [Objective] Tooth flank fracture is a contact fatigue failure mode of high-cycle/ultra-high-cycle fatigue damage where cracks initiate due to material damage at deep locations inside the tooth. It is proposed to establish a calculation method for the risk threshold of tooth flank fracture in the gear tooth interior based on the multiaxial stress evaluation approach. [Methods] Based on contact theory, gear meshing geometry theory and the fundamental theories of elasticity, a parsing model for the equivalent contact internal-field multiaxial stress of gear pairs was established, and a coupled mathematical model for gradient-bearing contact fatigue risk prediction of gears was formulated. The micro-element discretization numerical method was adopted to solve contact problems involving singular integrals of contact stress components for the elastic half-plane. In addition, research on the risk threshold of tooth flank fracture in the gear tooth interior was conducted based on the multiaxial stress evaluation method. [Results] The results indicate that under the multiaxial stress field, the risk threshold is the highest in the zone between the hardened layer and the core inside the gear tooth, where cracks are prone to initiate and the tooth flank fracture failure is prone to occur. The risk threshold obtained by the proposed model is relatively close to that derived from ISO 6336-4 technical specifications. Moreover, the fracture position of the test gear is basically consistent with the risk area calculated by the proposed model. These findings demonstrate that the proposed model can serve as a reference for the preliminary design of gears resistant to tooth surface fracture, and can be used as a tooth flank fracture risk assessment method supplementary to existing technical specifications. The established tooth flank fracture risk prediction model based on multiaxial stress fatigue provides a reference for the design and manufacturing of the gear transmission engineering equipment.

**Key words:** Cylindrical gear; Tooth flank fracture; Multi-axial fatigue; Parsing model; Stress distribution (编辑: 刘星泽)